О некоторых инвариантных подпространствах диссипативных операторов экспоненциального типа

М. С. БРОДСКИЙ (Одесса, СССР)

Линейный ограниченный оператор A, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, будем относить к классу $\Lambda^{(\exp)}$, если: 1) A — диссипативен[1]); 2) A не имеет отличных от нуля точек спектра; 3) $(I-\lambda A)^{-1}$— функция экспоненциального типа. Тип роста функции $(I-\lambda A)^{-1}$ условимся обозначать через $\sigma(A)$. Если A удовлетворяет условиям 1), 2) и, кроме того, $\tau(A)=\operatorname{sp} A_I<\infty$ (соответственно $\dim A_I\mathfrak{H}=1$), то A будем относить к классу Λ_v (соответственно Λ_1).

Имеют место соотношения $\Lambda_1\subset\Lambda_v\subset\Lambda^{(\exp)}$. Для каждого оператора $A\in\Lambda^{(\exp)}$ выполняется неравенство $\sigma(A)\leqq 2\tau(A)$. Вполне несамосопряженные[2]) операторы класса Λ_1 одноклеточны и для них $\sigma(A)=2\tau(A)$ [1].

Согласно теореме Г. Э. Кисилевского [2] пространство $\mathfrak{H}$, в котором действует вполне несамосопряженный оператор $A\in\Lambda_v$, представимо в виде аппроксимативной суммы[3]) конечного или счетного числа инвариантных относительно A подпространств $\mathfrak{H}_j$, в каждом из которых индуцируется одноклеточный оператор A_j, причем числа $\sigma(A_j)$ определяются по оператору A однозначно. Для полного перенесения жордановой теории конечномерных операторов на класс Λ_v следует, очевидно, дополнить теорему Г. Э. Кисилевского решением обратной задачи, заключающейся в описании процесса конструирования любых операторов класса Λ_v из одноклеточных операторов того же

---

[1]) Оператор A называется *диссипативным*, если $A_I=\dfrac{A-A^*}{2i}\geqq 0$.

[2]) Оператор A называется *вполне несамосопряженным*, если не существует инвариантного относительно A и A^* ненулевого подпространства, в котором индуцируется самосопряженный оператор.

[3]) Пространство $\mathfrak{H}$ называется *аппроксимативной суммой* своих подпространств $\mathfrak{H}_\gamma(\gamma\in\Gamma)$ если 1) $\tilde{\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}}\mathfrak{H}_\gamma=\mathfrak{H}$; 2) $\left(\tilde{\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma_1}}\mathfrak{H}_\gamma\right)\cap\left(\tilde{\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma_2}}\mathfrak{H}_\gamma\right)=0$ для любых $\Gamma_1,\Gamma_2\subset\Gamma$, удовлетворяющих условиям $\Gamma_1\cup\Gamma_2=\Gamma$, $\Gamma_1\cap\Gamma_2=0$. Символом $\tilde{\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}}\mathfrak{H}_\gamma$ обозначается замыканиелинейной оболочки подпространств $\mathfrak{G}_\gamma(\gamma\in\Gamma)$.

класса. О возникающих здесь затруднениях дает представление уже простейший случай, когда пространство $\mathfrak{H}$ представлено в виде аппроксимативной суммы двух своих подпространств $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$. Дело в том, что если задать в них произвольно некоторые одноклеточные операторы $A_1 \in \Lambda_v$ и $A_2 \in \Lambda_v$, то этим в $\mathfrak{H}$ будет определен оператор A, который может оказаться неограниченным или недиссипативным.

В настоящей статье изучается взаимное расположение инвариантных подпространств операторов класса $\Lambda^{(\exp)}$, в которых индуцируются операторы класса Λ_1. В частности, решается вышеупомянутая обратная задача для тех операторов класса Λ_v, которые допускают распад на одноклеточные операторы класса Λ_1.

Мы будем ссылаться на следующие результаты [1].

Теорема 0. 1. *Если A — вполне несамосопряженный оператор класса $\Lambda^{(\exp)}$, действующий в $\mathfrak{H}$, и $\sigma(A)=0$, то $\mathfrak{H}=0$.*

Теорема 0. 2. *Если оператор A_0 индуцирован опертатором $A \in \Lambda^{(\exp)}$ в некотором инвариантном относительно A подпространстве, то $A_0 \in \Lambda^{(\exp)}$ и $\sigma(A_0) \leqq \sigma(A)$.*

Теорема 0. 3. *Пусть A — вполне несамосопряженный оператор класса $\Lambda^{(\exp)}$, действующий в пространстве $\mathfrak{H}$, и $A_\gamma (\gamma \in \Gamma)$ — операторы, индуцированные в некоторых инвариантных относительно A подпространствах $\mathfrak{H}_\gamma$. Если $\mathfrak{H} = \tilde{\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma}} \mathfrak{H}_\gamma$, то $\sigma(A) = \sup\limits_{\gamma \in \Gamma} \sigma(A_\gamma)$.*

Теорема 0. 4. *Пусть при условиях предыдущей теоремы подпространства $\mathfrak{G}_\gamma$ упорядочены по вложению. Если $A \in \Lambda_\gamma$, то $\inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \sigma(A_\gamma) = \sigma(A_0)$, где оператор A_0 индуцирован в подпространстве $\mathfrak{H}_0 = \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{H}_\gamma$.*

1. Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторое бесконечномерное сепарабльное гильбертово пространство. Построим гильбертово пространство $L^{(2)}_{\mathfrak{G}}(0, l)$ $(0 < l < \infty)$, состоящее из всех слабо измеримых вектор-функций $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq l)$ со значениями в $\mathfrak{G}$, для которых $\|f\|^2 = \int\limits_0^l \|f(x)\|^2_{\mathfrak{G}} dx < \infty$. Скалярное произведение в $L^{(2)}_{\mathfrak{G}}(0, l)$ определяется формулой $(f, g) = \int\limits_0^l (f(x), g(x))_{\mathfrak{G}} dx$. Зададим в $L^{(2)}_{\mathfrak{G}}(0, l)$ оператор J, полагая

$$(Jf)(x) = 2i \int\limits_x^l f(y)\, dy,$$

и отнесем каждому вектору $g \in \mathfrak{G}$ векор-функцию $\hat{g} = \hat{g}(x) \equiv g$ $(0 \leqq x \leqq l)$. Легко видеть, что совокупность всех вектор-функций $\hat{g}(x)$ совпадает с областью значений оператора J_I. Оператор J вполне несамосопряжен и принадлежит классу $\Lambda^{(\exp)}$ [1].

Лемма 1.1. *Если P — ортопроектор на инвариантное относительно J подпространство $L\subset L^{(2)}_{\mathfrak{G}}(0, l)$, то*

$$(1)\qquad \int_0^x \big((f-Pf)(x-y),(Pg)(l-y)\big)_{\mathfrak{G}}\,dy=0 \qquad \big(0\leqq x\leqq l;\ f(x),g(x)\in L^{(2)}_{\mathfrak{G}}(0,l)\big).$$

Доказательство. Поскольку

$$(J^{*n}h)(t)=\frac{(-2i)^n}{(n-1)!}\int_0^t s^{n-1}h(t-s)\,ds \qquad \big(h(x)\in L^{(2)}_{\mathfrak{G}}(0,l);\ n=1,2,\ldots\big)$$

и

$$PJ^{*n}(I-P)=0 \qquad (n=1,2,\ldots),$$

то

$$\int_0^l s^{n-1}\int_s^l \big((f-Pf)(t-s),(Pg)(t)\big)_{\mathfrak{G}}\,dt\,ds=\int_0^l\int_0^t \big(s^{n-1}(f-Pf)(t-s),(Pg)(t)\big)_{\mathfrak{G}}\,ds\,dt=$$

$$=\int_0^l\Big(\int_0^t s^{n-1}(f-Pf)(t-s)\,ds,(P)g(t)\Big)_{\mathfrak{G}}dt=\frac{(n-1)!}{(-2i)^n}\big(J^{*n}(I-P)f,Pg\big)=0.$$

Следовательно,

$$(2)\qquad \int_s^l \big((f-Pf)(t-s)\,(Pg)(t)\big)_{\mathfrak{G}}\,dt=0.$$

Равенство (1) вытекает из (2) при помощи замены переменных $s=l-x$, $t=l-y$. Лемма доказана.

Пусть $h\in\mathfrak{G}$ $(h\neq 0)$ и $\tau\in(0,l]$. Обозначим чрез $L(h,\tau)$ совокупность всех вектор-функций вида $\varphi(x)h$ $(0\leqq x\leqq l)$, где $\varphi(x)$ — произвольная скалярная функция с суммируемым квадратом модуля, равная нулю почти всюду на промежутке $[\tau; l]$. Очевидно, $L(h,\tau)$ представляет собой подпространство в $L^{(2)}_{\mathfrak{G}}(0,l)$, инвариантное относительно оператора J. Оператор, индуцированный в $L(h,\tau)$ будем обозначать через $J(h,\tau)$. Нетрудно проверить, что $J(h,\tau)\in\Lambda_1$. Область значений оператора $\big(J(h,\tau)\big)_I$ натянута на вектор-функцию

$$h(\tau;x)=\begin{cases}h & (0\leqq x<\tau)\\ 0 & (\tau\leqq x\leqq l)\end{cases},$$

причем $\big(J(h,\tau)\big)_I h(\tau;x)=\tau h(\tau;x)$.

Лемма 2.1. *Каждое инвариантное относительно J подпространство $L\subset L^{(2)}_{\mathfrak{G}}(0,l)$, в котором индуцируется оператор класса Λ_1, совпадает с одним из подпространств $L(h,\tau)$.*

Доказательство. Пусть J_L — оператор, индуцированный в L, и $e(x)$ — орт, принадлежащий одномерному подпространству $(J_L)_I L$. Проекция на L каждой вектор-функции $\hat{f}(x)$ коллинеарна $e(x)$. Подставляя в (1) вместо $f(x)$ и $g(x)$ соответственно $\hat{f}(x)$ и $e(x)$, получим

$$\begin{aligned}\int_0^x (\hat{f}, e(l-y))_{\mathfrak{G}}\,dy &= \int_0^x ((\hat{f}, e)e(x-y), e(l-y))_{\mathfrak{G}}\,dy,\\ \int_0^x e(l-y)\,dy &= \int_0^x (e(l-y), e(x-y))_{\mathfrak{G}}\,dy \int_0^l e(y)\,dy.\end{aligned} \tag{3}$$

Дифференцируя обе части последнего соотноения и полагая $h=\int_0^l e(y)dy$, придем к равенству $e(x)=\varphi(x)h$, где $\varphi(x)$ — скалярная функция. Из (3) следует теперь, что

$$\int_0^x \left(1-\|h\|_{\mathfrak{G}}^2\overline{\varphi(x-y)}\right)\varphi(l-y)\,dy = 0.$$

По теореме Титчмарша о свертке [3] существует такое число $\tau\in[0, l]$, что

$$\varphi(x)=\begin{cases}\|h\|_{\mathfrak{G}}^{-2} & (0\leqq x<\tau),\\ 0 & (\tau\leqq x\leqq l).\end{cases}$$

Остается заметить, что L представляет собой замыкание линейной оболочки вектор-функций вида $J^n(\varphi(x)h)$ $(n=0, 1, \ldots)$.

Лемма 3. 1. *Если $0<\tau\leqq\tau_0\leqq l$, то то проекция вектор-функции $h_0(\tau_0; x)$ на подпространство $L(h, \tau)$ коллинеарна вектор-функции $h(\tau; x)$.*

Доказательство. Пусть P — ортопроектор на $L(h, \tau)$. Тогда

$$Ph_0(\tau_0; x) = \psi(x)h \quad (\psi(x)\in L^{(2)}(0, l);\ \psi(x) = 0\ (\tau\leqq x\leqq l))$$

и, следовательно,

$$\int_0^\tau (h_0(\tau_0; x), \varphi(x)h)_{\mathfrak{G}}\,dx = \int_0^\tau (\psi(x)h, \varphi(x)h)_{\mathfrak{G}}\,dx \qquad (\varphi(x)\in L^{(2)}(0, \tau)).$$

Таким образом,

$$(h_0(\tau_0; x), h)_{\mathfrak{G}} = \psi(x)(h, h)_{\mathfrak{G}}, \quad \psi(x) \equiv \frac{(h_0, h)_{\mathfrak{G}}}{(h, h)_{\mathfrak{G}}} \qquad (0\leqq x<\tau).$$

Теорема 1. 1. *Пусть $h_j\in\mathfrak{G}$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ и $\tau_j\in(0, l]$ $(j=1, 2, \ldots, n)$. Тогда либо*

$$\dot{\bigcup_{j=1}^{n}} L(h_j, \tau_j) = L(h_1, \tau_1)\dot{+}L(h_2, \tau_2)\dot{+}\ldots\dot{+}L(h_n, \tau_n) \tag{4}$$

и вместе с тем

$$\tilde{\bigcup_{j=1}^{n}} L(h_j, \tau_j) = \bigoplus_{j=1}^{n} L(e_j, \tau_j), \tag{5}$$

где $\{e_j\}_1^n$ *— некоторая ортонормированная система, либо существует число* $j_0 (1 \leqq j_0 \leqq n)$ *такое, что*

$$L(h_{j_0}, \tau_{j_0}) \subset \tilde{\bigcup_{j \neq j_0}} L(h_j, \tau_j).$$

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что

$$\tau_1 \geqq \tau_2 \geqq \ldots \geqq \tau_n. \tag{6}$$

Пусть векторы h_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ линейно независимы. Тогда, образуя ортонормированную систему

$$e_j = \alpha_{j1} h_1 + \alpha_{j2} h_2 + \ldots + \alpha_{jj} h_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

и пользуясь соотношениями (6), получим

$$L(e_j, \tau_j) \subset \tilde{\bigcup_{k=1}^{j}} L(h_k, \tau_k). \tag{7}$$

При этом

$$h_j = \beta_{j1} e_1 + \beta_{j2} e_2 + \ldots + \beta_{jj} e_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

и, следовательно,

$$L(h_j, \tau_j) \subset \bigoplus_{k=1}^{j} L(e_k, \tau_k). \tag{8}$$

Из (7) и (8) вытекает равенство (5). Поскольку каждая вектор-функция, содержащаяся в правой части равенства (5), однозначно представима в виде суммы n слагаемых, принадлежащих соответственно подпространствам $L(h_j, \tau_j)$ $(j=1, 2, \ldots, n)$, то верно и равенство (4).

В случае, когда вектор h_{k_0} является линейной комбинацией векторов $h_1, h_2, \ldots, h_{k_0-1}$, имеем

$$L(h_{k_0}, \tau_{k_0}) \subset \tilde{\bigcup_{k=1}^{k_0-1}} L(h_k, \tau_k).$$

Теорема 2.1. *Пусть* $h^{(\gamma)} \in \mathfrak{G}$ *и* $\tau^{(\gamma)} \in (0, l]$ $(\gamma \in \Gamma)$. *Если в подпространстве* $L = \tilde{\bigcup_{\gamma \in \Gamma}} L(h^{(\gamma)}, \tau^{(\gamma)})$ *индуцируется оператор* A *класса* Λ_v, *то*

$$L = \bigoplus_{j=1}^{\omega} L(e_j, \tau_j) \qquad (\omega \leqq \infty), \tag{9}$$

где $\{e_j\}_1^\omega$ *— некоторая ортогональная система, а числа* τ_j *удовлетворяют соотношениям*

$$\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_{p_1} > \tau_{p_1+1} = \tau_{p_1+2} = \ldots = \tau_{p_2} > \tau_{p_2+1} = \ldots. \tag{10}$$

Представление (9) *является единственным в том смысле, что если*

$$L = \bigoplus_{j=1}^{\omega'} L(e'_j, \tau'_j) \qquad (\omega' \leqq \infty), \tag{11}$$

где $\{e'_j\}_1^{\omega'}$ *— новая ортонормированная система, и*

$$\tau'_1 = \tau'_2 = \ldots = \tau'_{p'_1} > \tau'_{p'_1+1} = \tau'_{p'_1+2} = \ldots = \tau'_{p'_2} > \tau'_{p'_2+1} = \ldots, \tag{12}$$

то $\omega = \omega'$, $\tau_j = \tau'_j$ $(j = 1, 1, 2, \ldots, \omega)$ *и*

$$\bigoplus_{j=p\ +1}^{p_{k+1}} L(e_j, \tau_j) = \bigoplus_{j=p_k+1}^{p_{k+1}} L(e'_j, \tau_j) \qquad (k = 0, 1, \ldots; \ p_0 = 0). \tag{13}$$

Доказательство. Ввиду теоремы 0. 3 $\tau_1 = \sup\limits_{\gamma\in\Gamma} \tau^{(\gamma)} < \infty$. Покажем, что существует вектор $e_1 \in \mathfrak{G}$ ($\|e_1\|_{\mathfrak{G}} = 1$) такой, что $L(e_1, \tau_1) \subset L$. Это утверждение очевидно, если τ_1 совпадает с одном из чисел $\tau^{(\gamma)}$. Если же все $\tau^{(\gamma)}$ отличны от τ_1, то в силу теоремы 1. 1 и условия $A \in \Lambda_v$ существует конечномерное подпространство $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}$ и такая последовательность $L(h^{(\gamma_j)}, \tau^{(\gamma_j)})$, что 1) $\tau^{(\gamma_1)} \leqq \tau^{(\gamma_2)} \leqq \ldots$, 2) $\tau^{(\gamma_j)} \to \tau_1$, 3) векторы $h^{(\gamma_{kn+1})}, h^{(\gamma_{kn+2})}, \ldots, h^{(\gamma_{kn+n})}$ при каждом целом неотрицательном k образуют базис в $\mathfrak{G}_0$. Отсюда вытекает, что при любом $e_1 \in \mathfrak{G}_0$ ($\|e_1\|_{\mathfrak{G}} = 1$) подпространства $L(e_1, \tau^{(\gamma_{kn+1})})$ ($k = 0, 1, \ldots$) приадлежат L. Следовательно $L(e_1, \tau_1) \subset L$.

По теореме 1. 1 линейная оболочка подпространств $L(e_1, \tau_1)$ и $L(h^{(\gamma_0)}, \tau^{(\gamma_0)})$ ($\gamma_0 \in \Gamma$) либо совпадает с $L(e_1, \tau_1)$, либо представима в виде $L(e_1, \tau_1) \oplus \oplus L(g^{(\gamma_0)}, \tau^{(\gamma_0)})$. Поэтому $L = L(e_1, \tau_1) + L_1$, где L_1 — замыкание линейной оболочки некоторых подпространств $L(g^{(\delta)}, \tau^{(\delta)})$ ($\delta \in \Delta$) таких, что $\tau_2 = \sup\limits_{\delta\in\Delta} \tau^{(\delta)} \leqq \leqq \tau_1$. Представляя аналогично L_1 в виде $L(e_2, \tau_2) + L_2$ и продолжая этот процесс, получим одно из следующих соотношений:

$$L = L(e_1, \tau_1) \oplus L(e_2, \tau_2) \oplus \ldots \oplus L(e_\omega, \tau_\omega),$$

$$L = \bigoplus_{j=1}^{\infty} L(e_j, \tau_j) \oplus L'. \tag{14}$$

Рассмотрим равенство (14) и обозначим через A_k оператор, индуцированный в подпространстве

$$L_k = L \ominus \left[\bigoplus_{j=1}^{k} L(_j, \tau_j)\right].$$

Так как

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tau_j < \infty, \quad \sigma(A_k) = 2\tau_k \to 0 \tag{15}$$

и $L' = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} L_k$, то в силу теорем 0. 4 и 0. 1 $L' = 0$.

Мы показали, что подпространство L представимо в виде (9). При этом, ввиду первого из соотношений (15), выполняется условие (10). Если одновременно имеет место представление (11) и для чисел τ'_j выполняются условия (12), то по теореме Г. Э. Кисичевского [2] $\omega=\omega'$ и $\tau_j=\tau'_j$ $(j=1, 2, \ldots, \omega)$. Согласно лемме 3. 1

$$e'_j(\tau_j;\, x) = \sum_{k=1}^{\omega} c_{jk} e_k(\tau; x), \qquad e_j(\tau_j; x) = \sum_{k=1}^{\omega} d_{jk} e'_k(\tau_k; x) \quad (j=1,2,\ldots,p_1; 0 \leqq x \leqq l),$$

откуда легко следует, что

$$e'_j = \sum_{k=1}^{p_1} c_{jk} e_k, \quad e_j = \sum_{k=1}^{p_1} d_{jk} e'_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, p_1).$$

Применяя теорему 1. 1, найдем, что

$$\bigoplus_{j=1}^{p_1} L(e_j, \tau_j) = \bigoplus_{j=1}^{p_1} L(e'_j, \tau_j).$$

Остальные равенства (13) доказываются аналогично.

2. Пусть в пространстве $\mathfrak{H}$ задан вполне несамосопряженный оператор A класса $\Lambda^{(\exp)}$. В пространстве $L^{(2)}_{\mathfrak{G}}(0, l)$ $\big(2l=\sigma(A)\big)$ существует инвариантное относительно J подпространство L такое, что индуцированный в L оператор J_L удовлетворяет условию $UA=J_L U$, где U — некоторое изометрическое отображение $\mathfrak{H}$ на L [4]. Этот результат позволяет переформулировать теоремы 1. 1 и 2. 1 следующим образом.

Теорема 1. 2. *Если A — вполне несамосопряженный оператор класса $\Lambda^{(\exp)}$ и $\mathfrak{H}_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ — инвариантные относительно A подпространства, в которых индуцируются операторы класса Λ_1, то либо*

$$\tilde{\bigcup_{j=1}^{n}} \mathfrak{H}_j = \mathfrak{H}_1 \dot{+} \mathfrak{H}_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \mathfrak{H}_n,$$

либо существует число j_0 $(1 \leqq j_0 \leqq n)$ такое, что $\mathfrak{H}_{j_0} \subset \tilde{\bigcup\limits_{j \neq j_0}} \mathfrak{H}_j$.

Теорема 2. 2. *Пусть A — вполне несамосопряженный оператор класса Λ_0 и $\mathfrak{H}^{(\gamma)}$ $(\gamma \in \Gamma)$ — инвариантные относительно A подпространства, в которых индуцируются операторы класса Λ_1. Тогда $\tilde{\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma}} \mathfrak{H}^{(\gamma)} = \bigoplus\limits_{j=1}^{\omega} \mathfrak{H}_j$ $(\omega \leqq \infty)$, где подпространства $\mathfrak{H}_j$ инвариантны относительно A, а индуцированные в них опе-*

раторы A_j *принадлежат* Λ_1 *и удовлетворяют условиям*

$$\tau(A_1)=\tau(A_2)=\ldots=\tau(A_{p_1})>\tau(A_{p_1+1})=\tau(A_{p_1+2})=\ldots=\tau(A_{p_2})>\tau(A_{p_2+1})=\ldots . \text{ [4]}$$

Если, кроме того, $\tilde{\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}} \mathfrak{H}^{(\gamma)} = \bigoplus\limits_{j=1}^{\omega'} \mathfrak{H}'_j \, (\omega' \leqq \infty)$, *где подпространства* $\mathfrak{H}'_j$ *также инвариантны относительно* A, *а индуцированные в них операторы* A'_j *принадлежат* Λ_1 *и удовлетворяют соотношениям*

$$\tau(A'_1)=\tau(A'_2)=\ldots=\tau(A'_{p'_1})>\tau(A'_{p'_1+1})=\tau(A'_{p'_1+2})=\ldots=\tau(A'_{p'_2})>\tau(A'_{p'_2+1})=\ldots,$$

то $\omega=\omega'$, $\tau(A_j)=\tau(A'_j)$ $(j=1, 2, \ldots, \omega)$ *и*

$$\bigoplus_{j=\overline{p}_k+1}^{p_{k+1}} \mathfrak{H}_j = \bigoplus_{j=\overline{p}_k+1}^{p_{k+1}} \mathfrak{H}'_j \qquad (k=0, 1, \ldots; \; p_0=0).$$

Цитированная литература

[1] М. С. Бродский, *Треугольные и жордановые представления линейных операторов* (Москва, 1959).

[2] Г. Э. Кисилевский, Об обобщении жордановой теории для некоторого класса линейных операторов в гильбертовом пространстве, *ДАН*, **176** (1967), 768—770.

[3] Э. Ч. Титчмарш, *Введение в теорию интегралов Фурье* (Москва, 1948).

[4] Л. Е. Исаев, Об одном классе операторов со спектром, сосредоточенном в нуле, *ДАН*, **178** (1968), 783—785.

[5] Г. Э. Кисилевский, Условия одноклеточности диссипативных вольтерровых операторов с конечномерной мнимой компонентой, *ДАН*, **159** (1964), 505—508.

(Поступило 18. IX. 1970. г.)

[4]) Ортогональный распад на операторы класса Λ_1 был получен Г. Э. Кисилевским [5] для произвольного вполне несамосопряженного оператора $A \in \Lambda_v$ с n-мерной мнимой компонентой, удовлетворяющего условию $\sigma(A) = \dfrac{2\tau(A)}{n}$.